

## UNTERSUCHUNG DES STICK-SLIP-VORGANGS MIT DEM ANALOGRECHNER

Von

Á. BOSZNAY, M. DABASI und GY. SZERVÁNSZKY

Lehrstuhl für Technische Mechanik Fakultät für Elektrotechnik —  
Technische Universität Budapest

Eingegangen am 27. Juli, 1972.

### 1. Einleitung, Zielsetzung

Im Beitrag soll die von einem der Verfasser analytisch untersuchte Aufgabe [1] mit Hilfe des Analogrechners gelöst werden. Im Laufe der Arbeit wurde ein doppeltes Ziel verfolgt: 1. in einigen konkreten und Spezialfällen die Schlußfolgerungen in [1] zu bekräftigen; 2. die zur Verfügung gestellte Analogrechenanlage MEDA 80T darauf zu prüfen, wie sie die ziemlich große Anzahl von Diskontinuitäten in der Aufgabe verfolgen kann.

Das Problem wird durch die Gleichung (7) in [1] beschrieben:

$$m\ddot{z} = R(z) + F_S(z; \dot{z}). \quad (1)$$

Die Funktionen  $R(z)$  und  $F_S(z; \dot{z})$  sind wie folgt definiert:

$$R(z) = \begin{cases} -\frac{1}{c}(z+h), & \text{wenn } z \leq -h, \\ 0, & \text{wenn } -h \leq z \leq h, \\ -\frac{1}{c}(z-h), & \text{wenn } z \geq h; \end{cases} \quad (2a)$$

$$F_S(z; \dot{z}) = \begin{cases} -\text{sign}(\dot{z} + v_0) \cdot S, & \text{wenn } \dot{z} + v_0 \neq 0 \\ -\text{sign } R \cdot S, & \text{wenn } \dot{z} + v_0 = 0 \text{ und } |R| > S_0 \\ -R, & \text{wenn } \dot{z} + v_0 = 0 \text{ und } |R| \leq S_0. \end{cases} \quad (2b)$$

## 2. Modellierung des Problems mit der Rechenanlage

Bei der Modellierung der Differentialgleichung wurde das bekannte Prinzip angewandt, zwischen den entsprechenden Operationseinheiten eine geschlossene Schleife herzustellen, d. h. die einstweilen in der Wirklichkeit unbekannten Veränderlichen ( $z$  und  $\dot{z}$ ) als bekannt anzunehmen und als deren Funktion  $\ddot{z}$  zu ermitteln. Das wird in Abb. 1 veranschaulicht.

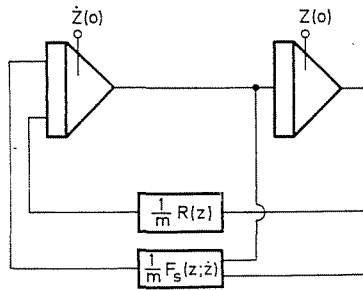


Abb. 1. Prinzipstromlaufbild der Lösung

### Modellierung der Funktion $R(z)$

Nach Schrifttumsangaben läßt sich die Modellierung der den Unempfindlichkeitsbereich beschreibenden Funktion  $R(z)$  am einfachsten durch Diodenkreise erzielen. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften der zur Verfügung stehenden Rechenanlage schien es jedoch günstiger, für die Ausgestaltung des Modells einen Differentialverstärker zu verwenden. Die allgemein bekannte Schaltung soll hier nicht gezeigt werden. In Abb. 2 ist das Bild der durch den Computer dargestellten Funktion  $\frac{1}{m} R(z)$  zu sehen.

### Modellierung der Funktion $F_S(z; \dot{z})$

Der zusammengezogene analytische Ausdruck für  $F_S(z; \dot{z})$  in (2b) lautet:

$$F_S(z; \dot{z}) = -S \cdot \text{sign}(\dot{z} + v_0) - [1 - \text{sign}(\dot{z} + v_0)] \{ R \cdot \Theta(S_0 - |R(z)|) + \\ + S \cdot \text{sign} R(z) [1 - \Theta(S_0 - |R(z)|)] \},$$

wo  $\Theta$  das Zeichen der Einheitssprungfunktion ist.

Der Charakter dieser Funktion  $F_S(z; \dot{z})$  wird durch den Umstand wesentlich beeinflusst, ob  $\text{sign}(\dot{z} + v_0)$  gleich Null ist, oder nicht. Daher mußte jede Schaltung abgelehnt werden, die in der Nähe der Argumentstelle Null unsicher

ist. Eine derartige, im übrigen sehr einfache Schaltung, die sich jedoch in der Nähe der Stelle Null instabil verhält, zeigt Abb. 3a. Im vorliegenden Falle wäre diese Schaltung schon deshalb ungünstig, weil sie selbst bei  $\dot{z} + v_0 = 0$  kein Ausgangszeichen Null liefert. Die Modellierung mit Diodenkreisen wurde wegen deren Kompliziertheit, ihrer Nullpunktwanderung und Asymmetrie verworfen.

Anhand der Messung wurde schließlich die Einheit mit dem Schaltbild in Abb. 3b ausgestaltet.

Das Bild der damit dargestellten Funktion ist in Abb. 4 zu sehen.

Auch aus Abb. 4 ist zu erkennen, daß diese Funktion nicht mit der auf die in der Mathematik übliche Weise definierten sign Funktion genau identisch ist, doch wird durch sie letztere gut angenähert, daher soll diese

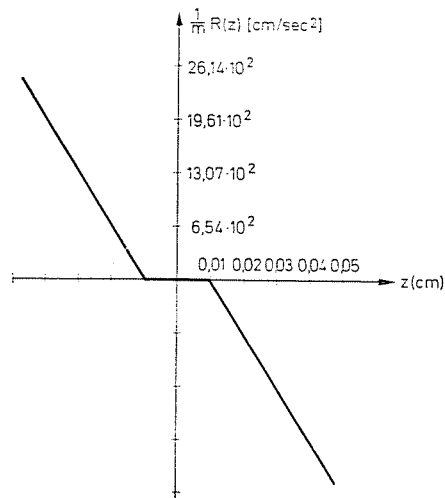


Abb. 2. Bild der durch den Rechner erstellten Funktion  $\frac{1}{m} R(z)$

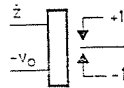


Abb. 3a. Schaltbild einer eine einfache, doch ungünstige sign-Funktion liefernden Einheit

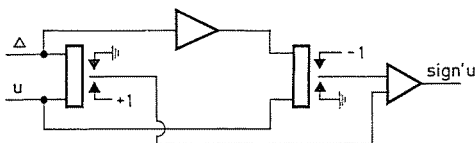


Abb. 3b. Schaltbild der die für die Lösung gewählte sign'-Funktion liefernden Einheit

Funktion im weiteren durch  $\text{sign}'$  bezeichnet werden. Die Genauigkeit des Kreises ist von der Höhe der Steuerspannung  $\Delta$  abhängig.

Man ist also selbstverständlich bestrebt,  $\Delta$  so niedrig wie möglich zu wählen; jedoch wäre die Wahl  $\Delta = 0$  sehr ungünstig, weil in diesem Falle der Kreis die gleichen Eigenschaften wie die Schaltung in Abb. 3a hätte.

Nach den Messungen bleibt bereits im Bereich  $\Delta \approx \frac{v_0}{50}$  der Verlauf der Lösung bei einer nicht allzu großen Änderung von  $\Delta'$  ( $= 0,3 \dots 3,0\Delta$ ) in den Grenzen der praktischen Genauigkeit unverändert.

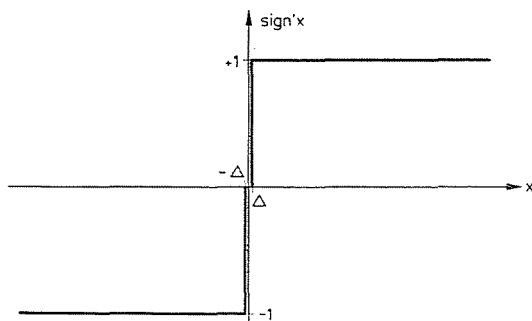


Abb. 4. Bild der durch die Einheit in Abb. 3b gelieferten Funktion

Die Modellierung wies noch einen kritischen Punkt auf: das Argument der Einheitssprungfunktion. Da die Form der Funktion  $F_S(z; \dot{z})$  von dieser Größe sehr empfindlich abhängig war, mußte eine hohe Genauigkeit angestrebt werden. Daher wurde die verhältnismäßig komplizierte, doch einen außerordentlich genauen Absolutwert liefernde Einheit in Abb. 5 gewählt. Die Abbildungen 6 und 7 zeigen die mit der den vorigen Absolutwert realisierenden

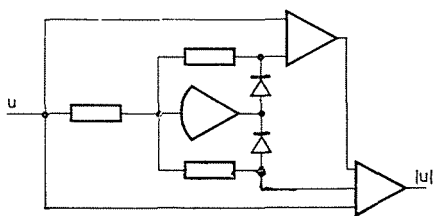


Abb. 5. Schaltbild der Einheit zur Darstellung des Absolutwerts

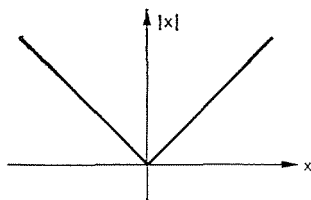


Abb. 6. Bild der durch die Einheit in Abb. 5 erzeugten Funktion  $y = |x|$

Operationseinheit dargestellten Bilder der Funktionen  $y = |x|$  bzw.  $y = |\operatorname{sign}' x|$ .

In Abb. 8 ist das volle Schaltbild dargestellt. In der Abbildung ist  $\alpha_t$  der Zeittransformationsbeiwert.

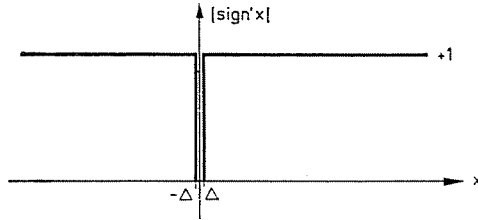


Abb. 7. Bild der durch die Einheit in Abb. 5 erzeugten Funktion  $y = |\operatorname{sign}' x|$

### 3. Auswertung der Ergebnisse

Um die einführend genannten Ziele zu erreichen, wurden zwei »Meßreihen« durchgeführt. Bei der ersten stellten die Meßgrößen die Parameter einer Werkzeugmaschine dar, doch wurden diese selbstverständlich zum Teil während des Programmablaufs zweckmäßig verändert. Die Daten sind wie folgt (für die physikalische Bedeutung siehe [1]);

$$\begin{aligned} m &= 1,02 \text{ kpsec}^2/\text{cm}, \\ S &= 10 \text{ kp}, \\ S_0 &= 15 \text{ kp}, \\ c &= 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm/kp}, \\ h &= 1 \cdot 10^{-2} \text{ cm}, \\ v_0 &= 2 \cdot 10^{-1} \text{ cm/sec.} \end{aligned}$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} \dot{z}(0) &= -v_0, \\ z(0) &= H = cS_0 + h. \end{aligned}$$

Im weiteren wurde in sämtlichen Phasen- und Zeitdiagrammen anstatt der Koordinate  $z$  die Koordinate  $z' = \frac{z}{\sqrt{mc}}$  benutzt. Diese lineare Transformation wurde — in Kenntnis der analytischen Lösung — durchgeführt, damit die Strecken der Lösungsphasenkurve, die andernfalls Ellipsen wären, zufolge der Transformation zu Kreisen werden. Da die Transformation linear ist, beeinflusste sie sonst den Charakter der Kurven und die von diesen ablesbaren Eigenheiten nicht.

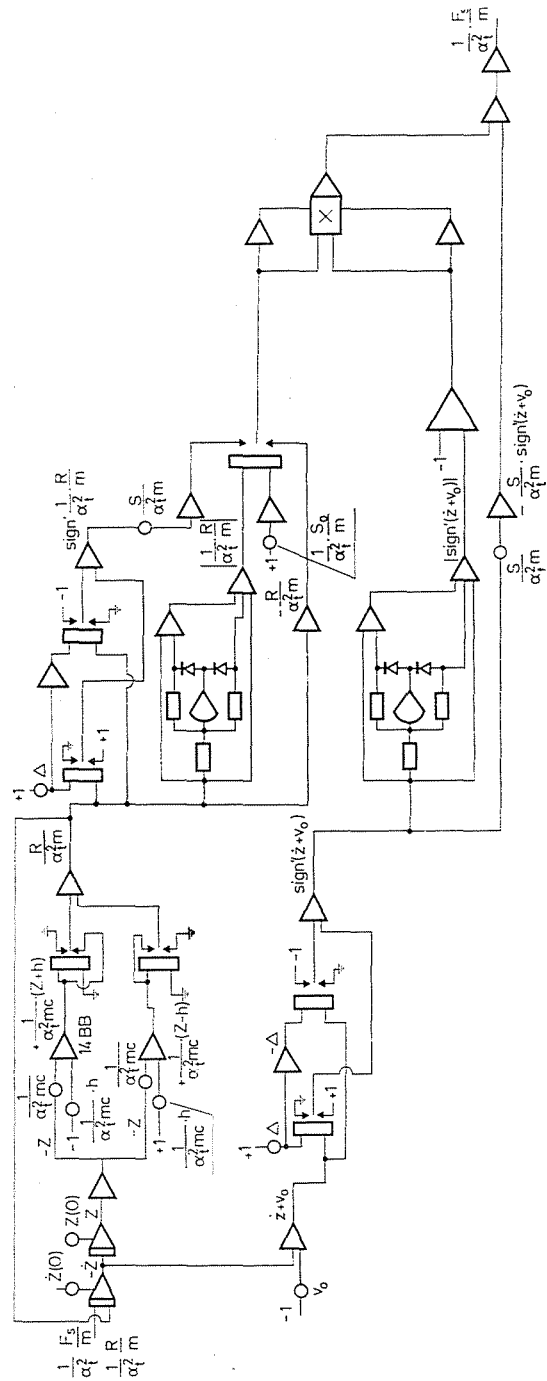


Abb. 8. Das volle Schaltbild der Lösung

Abb. 9 zeigt die zu den aus ihr ablesbaren Anfangswerten der Aufgabe gehörenden verschiedenen Lösungen. Vergleicht man die zu verschiedenen Anfangswerten gehörenden Maschinenlösungen mit der analytischen, stimmen diese ausgezeichnet überein. Es ist z. B. klar zu erkennen, daß eine sog. S am

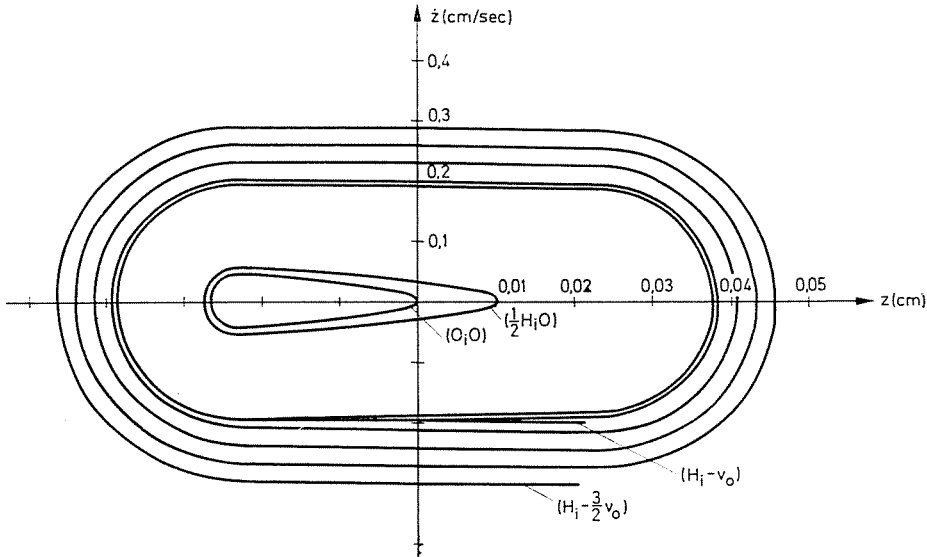


Abb. 9. Zu verschiedenen Anfangswerten gehörende Lösungen in der Phasenebene

melkurve vorhanden ist, die auch bei der Diskussion der analytischen Lösung nachgewiesen wurde, für die die Feststellungen gelten:

1. Liegt der dem Anfangswert entsprechende Phasepunkt außerhalb der Sammelkurve, so nähert sich die Phasenkurve der Lösung dieser Kurve;
2. liegt der Anfangsphasepunkt auf der Sammelkurve oder innerhalb dieser, wird die Phasenkurve der Lösung geschlossen, d. h. der Vorgang periodisch sein.

Abb. 10a zeigt die zu  $z(0) = H$  und  $\dot{z}(0) = -v_0$  gehörende Lösung der ursprünglichen Aufgabe in der Phasenebene.

In Abb. 10b sind die zu derselben Aufgabe gehörenden Lösungsfunktionen  $z = z(t)$  und  $\dot{z} = \dot{z}(t)$  zu sehen. Auch dem Diagramm  $\dot{z} = \dot{z}(t)$  ist zu entnehmen, daß in diesem Beispiel ein Stick-Slip-Vorgang vorliegt.

In der nächsten Abbildungsreihe wird gezeigt, was dann geschieht, wenn bei unveränderten Anfangswerten und Parametern das Spiel ( $\gg h \ll$ ) vermindert wird.

In den Abbildungen 11a und 11b ist der Wert von  $h$  gleich der Hälfte, in den Abbildungen 12a und 12b gleich 1 Zehntelteil des ursprünglichen Wertes, und in den Abb. 13a und 13b gleich Null.

Aus der Meßreihe ist eindeutig zu erkennen, daß sich mit abnehmendem Spiel der Stick-Slip-Vorgang immer weniger geltend macht, und bei dem Wert von  $h$  gleich Null die Erscheinung aufhört. Dieses Ergebnis stimmt mit der Erfahrung der Praktiker überein, daß — besteht die Gefahr eines Stick-Slip-Vorgangs — das Spiel womöglich auf das Minimum herabgesetzt werden soll.

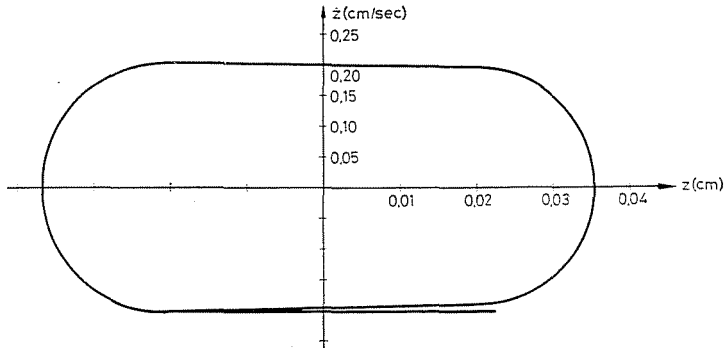


Abb. 10a. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  gehörende Lösung in der Phasenebene

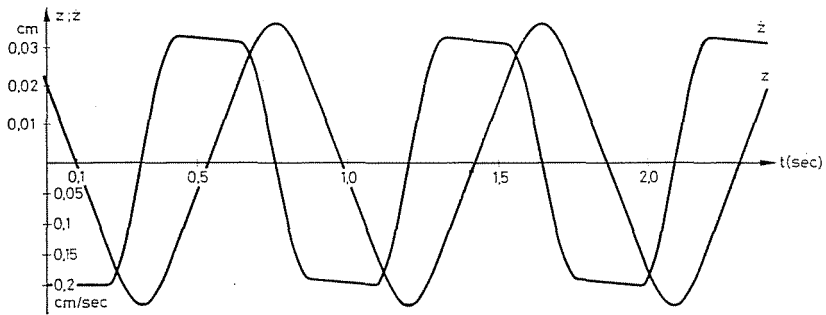


Abb. 10b. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  gehörende Lösungsfunktionen  $z = z(t)$  und  $\dot{z} = \dot{z}(t)$

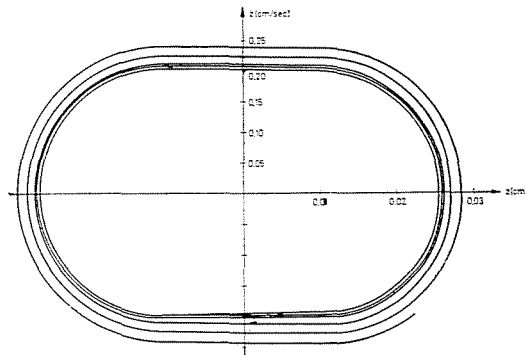


Abb. 11a. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  und zur Parameterwahl  $h' = \frac{h}{2}$  gehörende Lösung in der Phasenebene



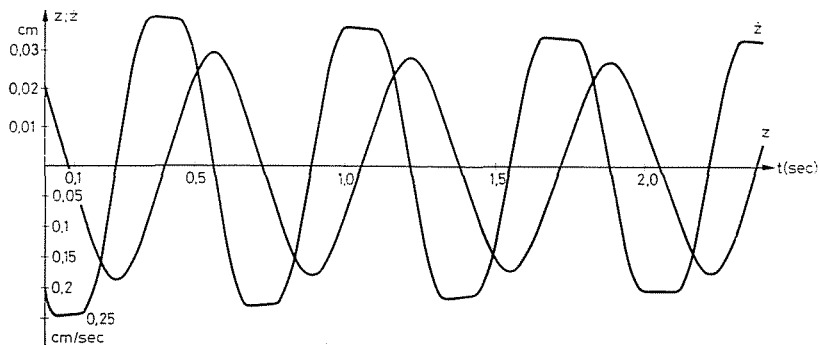


Abb. 11b. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  und zu der Parameterwahl  $h' = \frac{4}{2}$  gehörende Lösungsfunktionen  $z = z(t)$  und  $\dot{z} = \dot{z}(t)$

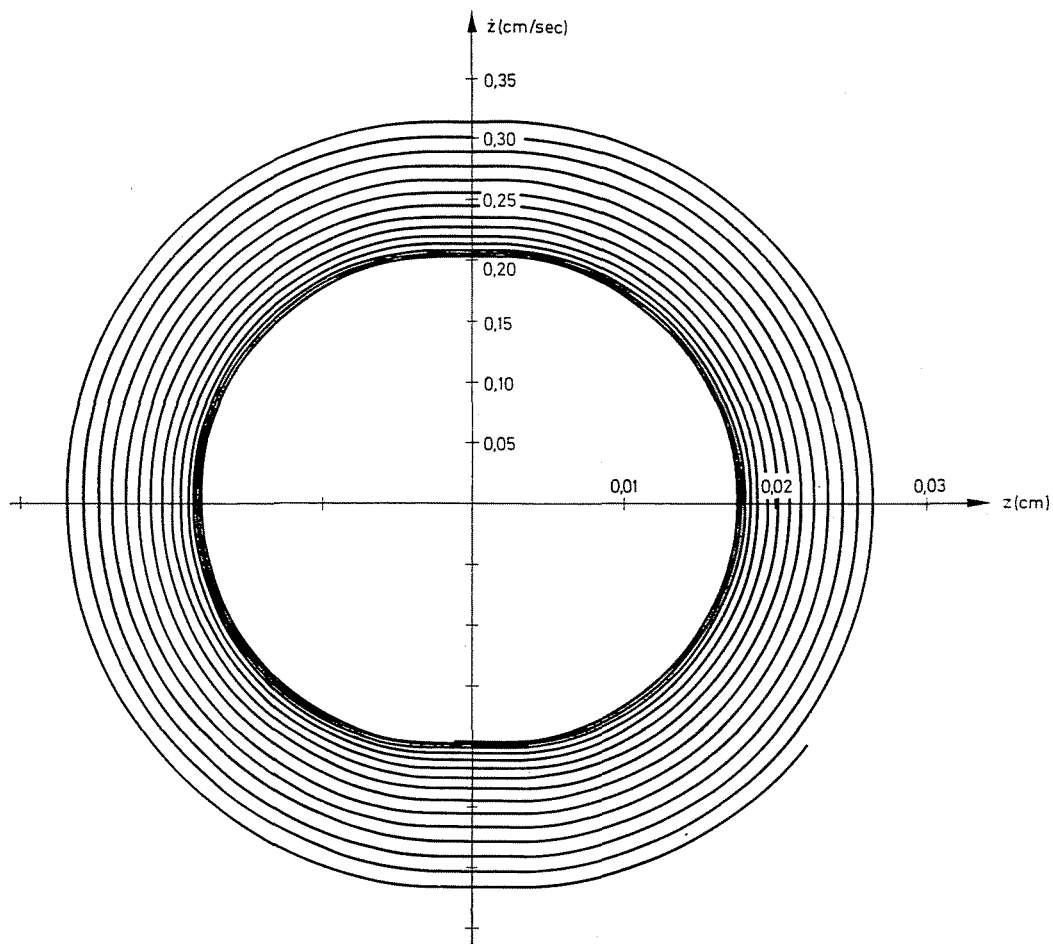


Abb. 12a. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  und zur Parameterwahl  $h' = \frac{h}{10}$  gehörende Lösung in der Phasenebene

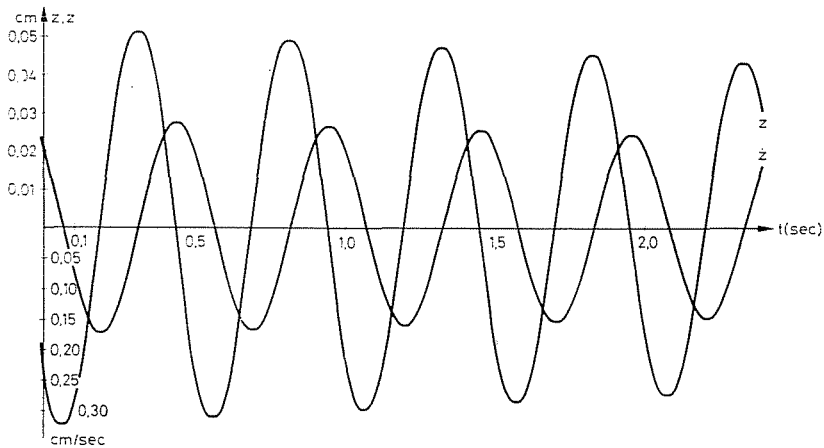


Abb. 12b. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  und zur Parameterwahl  $h' = \frac{h}{10}$  gehörende Lösungsfunktionen  $z = z(t)$  und  $\dot{z} = \dot{z}(t)$

Abb. 14 zeigt den Prozeßverlauf bei zunehmender Ruhereibungszahl und unveränderlichen anderen Parametern und Anfangswerten. Dies wurde durch die Erhöhung des Wertes von  $S_0$  realisiert.

- Zu Kurve 1 gehört  $S'_0 = S_0$ ,
- zu Kurve 2 gehört  $S'_0 = 5S_0$ ,
- zu Kurve 3 gehört  $S'_0 = 10S_0$ ,
- zu Kurve 4 gehört  $S'_0 = 20S_0$ ,
- zu Kurve 5 gehört  $S'_0 = 40S_0$ .

Hierin bedeutet  $S_0$  die ursprüngliche Reibungskraft.

Es ist zu erkennen, daß sich mit zunehmender ruhender Reibungszahl die mit  $\dot{z} = -v_0$  gekennzeichnete Zeitdauer verlängert.

Die weiteren Abbildungen zeigen die zu den Parametern einer fiktiven Werkzeugmaschine gehörenden Lösungen (die Parameter könnten selbstverständlich realisiert werden). In Kenntnis der analytischen Lösung wurden die Daten so gewählt, daß der Stick-Slip-Vorgang noch auffallender sei als im vorigen Falle. In den Abb. 15a und 15b sind die Phasenkurve bzw. die Zeitfunktionen  $z = z(t)$  und  $\dot{z} = \dot{z}(t)$  der Lösung gezeigt.

In Abb. 16 sind die zu den Anfangsphasenpunkten  $(H; -1,25 v_0)$  bzw.  $(H; -1,5 v_0)$  gehörenden Lösungskurven dargestellt.

Es ist zu sehen, daß diese Kurven die Gerade  $\dot{z} = -v_0$  entlang einen Bruch aufweisen, d. h.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{d\dot{z}}{dz} \bigg|_{\dot{z} = -v_0 - a} - \frac{d\dot{z}}{dz} \bigg|_{\dot{z} = -v_0 + a} \right) \neq 0.$$

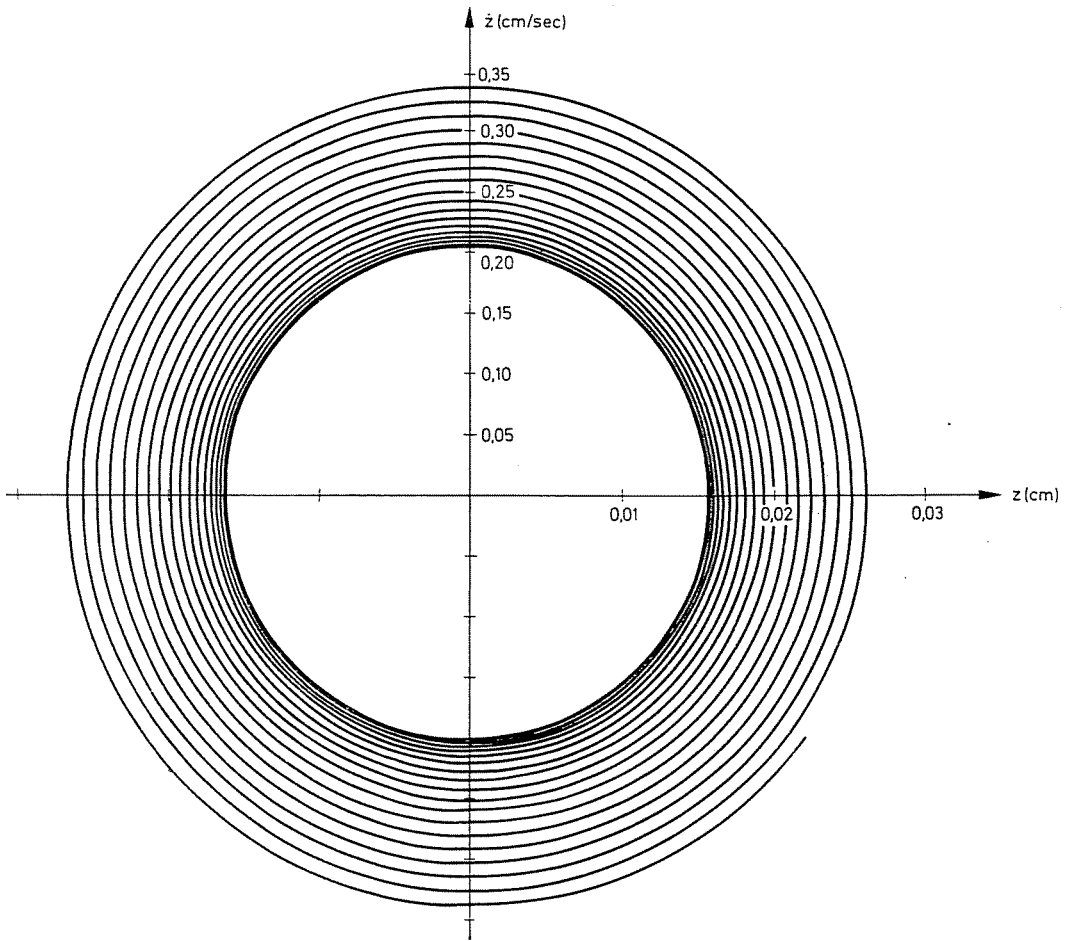


Abb. 13a. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  und zu der Parameterwahl  $h' = 0$  gehörende Lösung in der Phasenebene

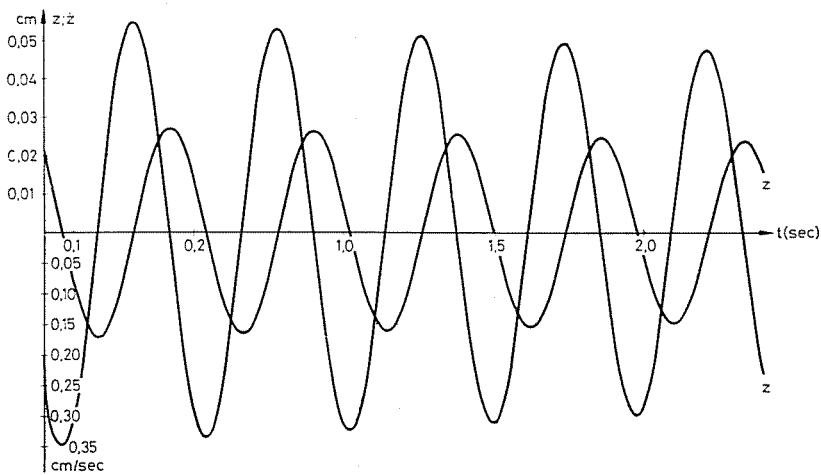


Abb. 13b. Zu den Anfangswerten  $z(0) = H$ ,  $\dot{z}(0) = -v_0$  und zu der Parameterwahl  $h' = 0$  gehörende Lösungsfunktionen  $z = z(t)$  und  $\dot{z} = \dot{z}(t)$

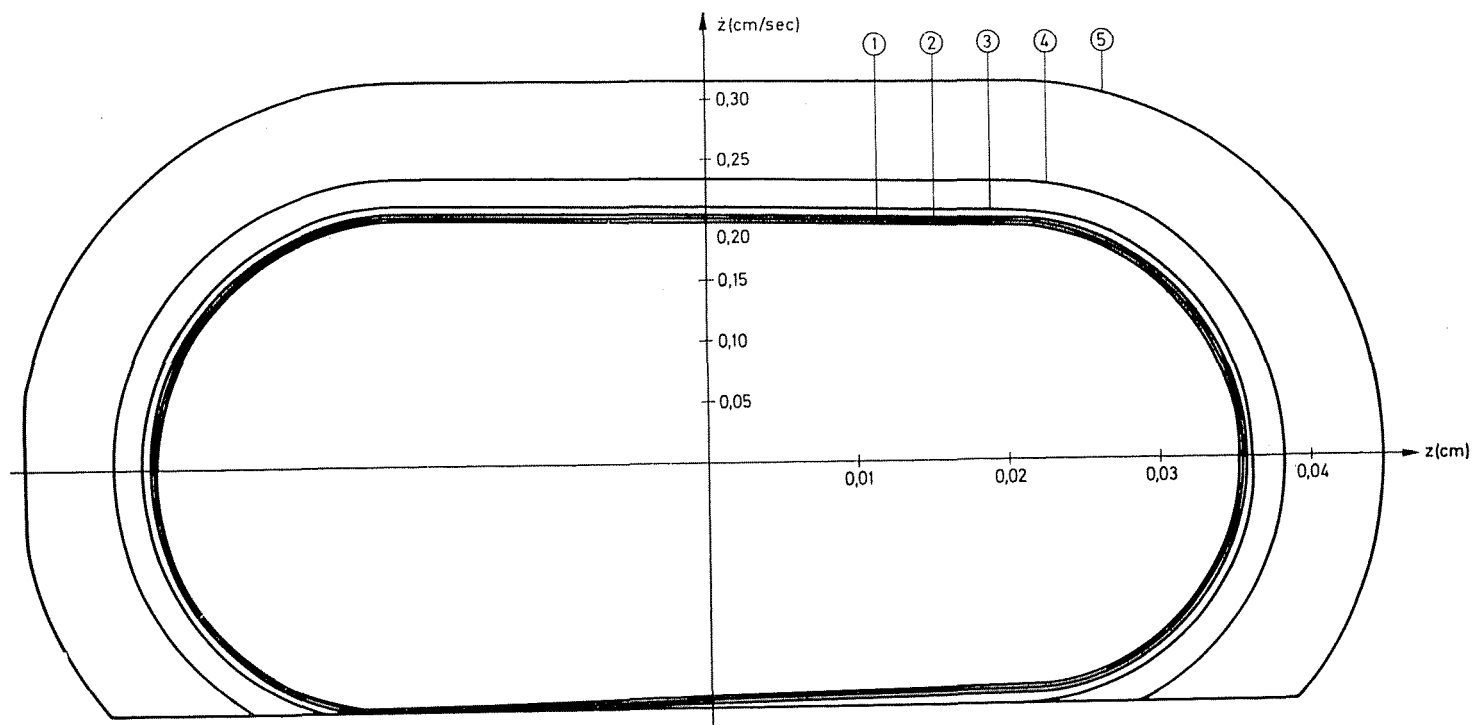


Abb. 14. Zu verschiedenen Parametern  $S_0$  gehörende Lösungen in der Phasenebene

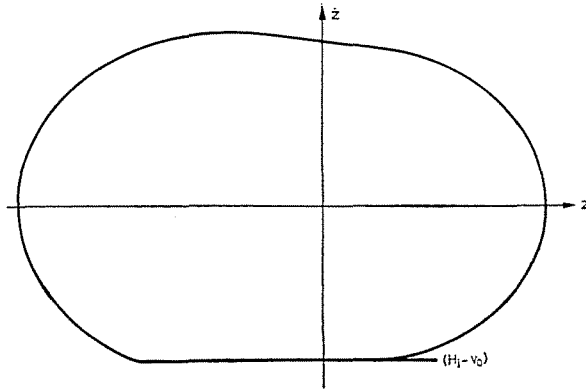


Abb. 15a. Zu den Parametern einer möglichen Werkzeugmaschine gehörende Lösung in der Phasenebene bei den Anfangswerten  $z(0) = H$  und  $\dot{z}(0) = -v_0$

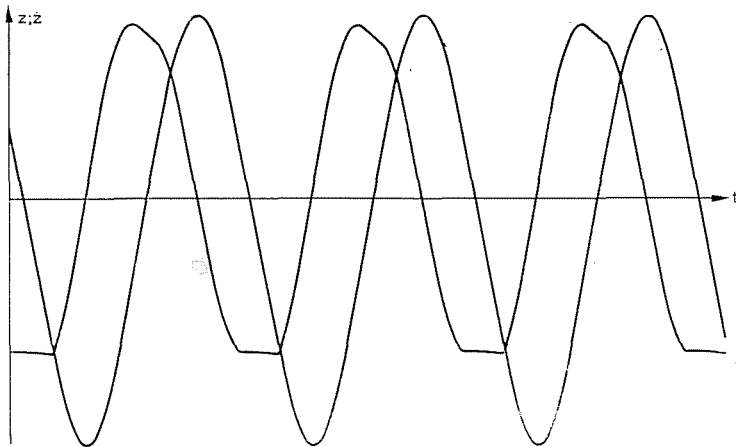


Abb. 15b. Zu den Parametern einer möglichen Werkzeugmaschine gehörende Lösungsfunktionen  $z = z(t)$  und  $\dot{z} = \dot{z}(t)$ , bei den Ausgangswerten  $z(0) = H$  und  $\dot{z}(0) = -v_0$

Diese Eigenschaft der Lösung wurde auch bei der analytischen Untersuchung des Problems aufgezeigt.

Abb. 17 zeigt die Lösungsphasenkurve der Aufgabe bei der Wahl der neuen Parameter  $m' = 2m$ ,  $c' = \frac{c}{2}$ . Die Anfangswerte wurden den neuen Parametern entsprechend verändert. [ $\dot{z}(0) = -v_0$ , aber  $z(0) = H' = h + c'S_0$ ].

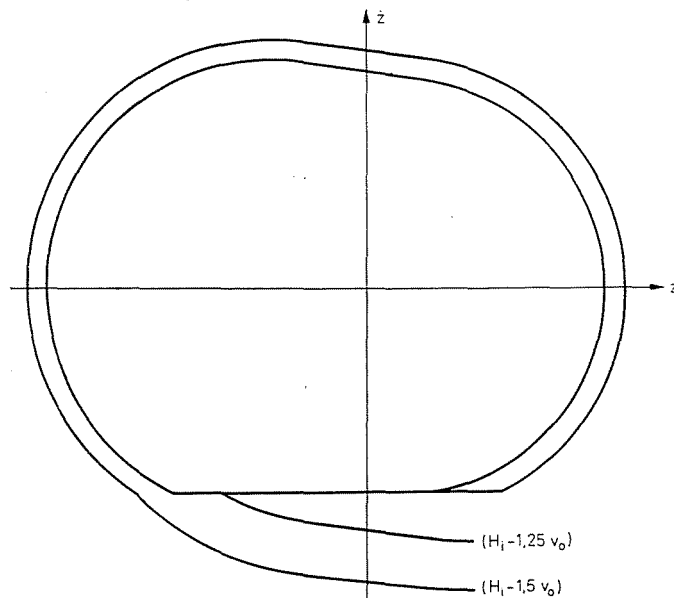


Abb. 16. Zu den Anfangsphasenpunkten  $(H; -1,25 v_0)$  und  $(H; -1,5 v_0)$  gehörende Lösungen in der Phasenebene

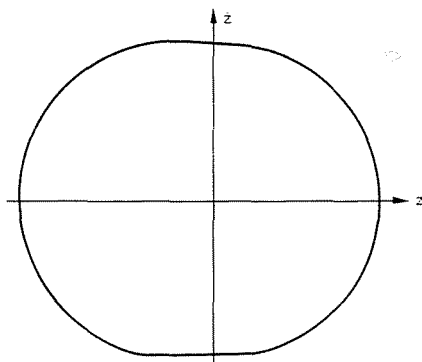


Abb. 17. Zur Parameterwahl  $m' = 2m$  und  $c' = \frac{c}{2}$  gehörende Lösung in der Phasenebene

### Zusammenfassung

Im Beitrag wird mit Hilfe des Analogrechners eine vom einem der Verfasser bereits auf analytischem Wege untersuchte Aufgabe gelöst. Es wurde ein doppeltes Ziel verfolgt: einerseits für einige Spezialfälle die Übereinstimmung der maschinellen Lösung mit der analytischen nachzuweisen, andererseits die Leistungsfähigkeit der zur Verfügung stehenden Rechanlage zu prüfen. Die Ergebnisse beweisen die volle Übereinstimmung zwischen den beiden Lösungsarten. Von dem benutzten Analogrechner wurde festgestellt, daß er die ziemlich zahlreichen Diskontinuitäten in der Aufgabe gut verfolgen kann, obwohl einzelne Teile des Modells in besonderer, von der üblichen abweichender Weise ausgestaltet werden mußten.

**Literatur**

1. BOSZNAY, Á.: Dynamics of a model of stick-slip, Acta Techn. Ac. Sci. Hung. **69** (1970) pp. 39–65.
2. HUSKEY and KORN: Computer Handbook, Mc Graw-Hill, New York 1962
3. SHIGLEY, I. E.: Simulation of Mechanical System: An Introduction, Mc Graw-Hill, New York 1967
4. JOHNSON, C. L.: Analog Computer Techniques, Mc Graw-Hill, New York 1963
5. VALENTA, I.—SKVOR, V.—KOTVA, M.: Programing and Solution of Problems on the Meda T, Bratislava 1967

Prof. Dr. Ádám BOSZNAY	}	1502 Budapest, Postfach 91. Ungarn
Miklós DABASI		
György SZERVÁNSZKY		